Universidad del Atlántico
MATUA
Revista Del Programa De Matemáticas Páginas: 1–13
Facultad de Ciencias Básicas
©Programa de Matemáticas
Vol. III , № 1, (2016)

Espacios con métrica indefinida

Indefinite metric spaces

Boris Lora

Grupo de Matemáticas Aplicadas, Universidad del Atlántico, Barranquilla-Colombia

borislora@mail.uniatlanco.edu.co

Carlos Salcedo

I. E. T. A. de Puerto Giraldo, Atlantico-Colombia

casa238@gmail.com

Willian Vides

Universidad de la Guajira, Riohacha- Colombia
wvides@uniguajira.edu.co

Resumen

Se hace un recorrido histórico - conceptual por algunos momentos de la teoría de los espacios de métrica indefinida, resaltando aspectos básicos de la geometría de los espacios de Krein y Pontryagin .

Palabras claves: Espacios de Hilbert, métrica indefinida, espacios de Krein, espacios de Pontryagin, Operadores lineales.

Abstract

A conceptual historical overview around some moments of indefinite inner product spaces emphasazing basic aspects of the geometry of Krein and Pontryagin spaces is made.

Keywords: Hilbert space, indefinite metric, Pontryagin spaces, Krein spaces, linear operators.

1. Introducción

Los espacios de Hilbert son esencialmente espacios vectoriales en los cuales se introduce un producto interno según el cual todo vector tiene cuadrado no negativo y el único vector con cuadrado cero es el vector nulo -además el espacio es completo con respecto a la topología inducida por la norma que a su vez es inducida por el producto interno-. Cuando la condición de no negatividad de los cuadrados en el producto es retirada, surgen los espacios con métrica indefinida.
El inicio del estudio sistemático de los operadores en espacios con métrica indefinida se remonta a la década de los años cuarenta del siglo XX. Pontryagin [12] publica en 1944 un artículo en el cual se consideran operadores lineales hermíticos en espacios con producto interno donde existen vectores no nulos cuyos cuadrados son cero. En las décadas siguientes muchos matemáticos se interesan por el tema: Iohvidov [4] muestra la primera aplicación al caso infinito-dimensional de la transformada de Cayley , Krein [6] aplica el principio de punto fijo a operadores lineales en espacios con métrica indefinida. En un principio los estudios sobre estos temas fueron realizados por matemáticos de la antigua URSS, concentrados esencialmente en las escuelas de Odessa, dirigida por Krein, la escuela de Moscú, por Naimark y un poco después la de Voronezh, por Iokhvidov; pero pronto matemáticos de otros países se interesaron en los espacios con métrica indefinida y sus aplicaciones: en Finlandia, Nevanlinna , Pesonen y Louhivaara, [11], en Alemania, Langer [9, 8]; En Francia, de Brange y Schwarz [7, 13] . Pronto en Europa muchos nombres de matemáticos se anexan a la lista de los interesados en estos temas, entre ellos mencionamos a Bognar, Ginzburg, Potapov, Azizov, Shmulyan [4, 5, 13]. Atravesando los mares, en tiempos más recientes, matemáticos americanos se han sumado a la exploración de estas teorías. Son notables y de gran importancia teórica, los trabajos de Rovnyak y Dritschel [3] en particular sobre operadores contráctiles y bicontráctiles en espacios de Pontryagin y de Krein.

En Latinoamérica el interés en los espacios de métrica indefinida se concentra especialmente en Argentina y Venezuela. En Venezuela un grupo de matemáticos, liderados inicialmente por Cotlar, Arocena y Sadovski, entre los cuales se puede mencionar a Marcantongnini, Bruzual, Dominguez, León entre otros, siguiendo el ambicioso programa de extender al máximo los alcances de ciertas generalizaciones del teorema de Bochner, han ampliado y generalizado algunos aspectos de esta teoría. Desde hace algún tiempo uno de los miembros fundadores de la escuela de Voronezh, Vladimir Strauss, aporta sus conocimientos y estudios en territorio suramericano. Varios artículos y tesis de doctorado y maestría sobre estos temas han salido de las universidades gauchas, especialmente de la Universidad Nacional de la Plata, donde se destacan los nombres de Alejandra Maestripieri y Demetrio Stojanoff.

El incipiente, pero creciente interés por estos temas en el ámbito local colombiano ha motivado la intención de publicar una serie de artículos con el objetivo de dar a conocer aspectos básicos de la teoría de los espacios de métrica indefinida, en especial la de los espacios de Krein y de Pontryagin. En este artículo la atencíon se centra en los aspectos geométricos básicos de estos espacios.

El artículo está estructurado en dos secciones, además de la introducción y una breve conclusión: en la primera sección se consideran algunos-muy pocos, por cuanto se presume el conocimientos de ellos-conceptos básicos sobre producto interno y espacios de Hilbert, en la siguiente sección se tratan lo conceptos que se han considerado relevantes en la geometría de los espacios de métrica indefinida en especial la de los espacios de Krein y de Pontryagin. Se hacen muy pocas demostraciones toda vez que éstas pueden encontrarse en la bibliografía muy particularmente en los libros de Bognar ([1]) y las notas de Bruzual ([2]).

2. Preliminares

2.1. Espacios con producto interno

Definición 1. *Sea $\mathfrak{F}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Un producto interno en $\mathfrak{F}$, es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \to \mathbb{C}$ tal que:*

1. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ *para todo* $x, y, z \in \mathfrak{F}$
2. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ *para todo* $x, y \in \mathfrak{F}$ *y* $\alpha \in \mathbb{C}$
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ *para todo* $x, y \in \mathfrak{F}$

Al par $(\mathfrak{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *se le llama espacio con producto interno.*

Nótese que en esta definición no se exige que el producto de un vector por si mismo sea no-negativo.

Definición 2. *Sea $\mathfrak{F}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \to \mathbb{C}$ es un producto interno tal que para cada $x \in \mathfrak{F}$ se satisface:*

4. $\langle x, x \rangle \geq 0$
5. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Entonces se dice que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto escalar.
Si 1, 2, 3 se cumplen, entonces puede ocurrir:

a) $\langle x, x \rangle \geq 0$, para todo $x \in \mathfrak{F}$, en este caso el producto es semi-definido positivo.

b) $\langle x, x \rangle \leq 0$, para todo $x \in \mathfrak{F}$, en este caso el producto es semi-definido negativo.

c) Si se cumplen 1, 2, 3, 4 y 5, el producto es definido positivo. Si 1, 2, 3, 5, tiene lugar y $\langle x, x \rangle \leq 0$, para todo $x \in \mathfrak{F}$, el producto es definido negativo.

d) Si existe x y $y \in \mathfrak{F}$ tal que $\langle x, x \rangle > 0$ y $\langle y, y \rangle < 0$, en este caso el producto es indefinido.

Ejemplo 1. *Sea $\mathfrak{F} = \{\{x_n\} \subset \mathbb{C} / \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$. Si $x = \{x_n\}$ y $y = \{y_n\}$ son elementos de $\mathfrak{F}$ y definimos:*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=3}^{+\infty} x_n \overline{y}_n \tag{1}$$

$$\langle x, y \rangle = -\sum_{n=3}^{+\infty} x_n \overline{y}_n \tag{2}$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \overline{y}_n \tag{3}$$

$$\langle x, y \rangle = -\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \overline{y}_n \tag{4}$$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^{n+1}x_n\overline{y}_n \tag{5}$$

Se tiene que (1) define un producto semidefinido positivo, (2) define uno semidefinido negativo. En estos dos productos los vectores con ceros en todas las entradas, a partir de la tercera son neutros. (3) Es un producto definido positivo, (4) es definido negativo y (5) es indefinido

Observación 1. *Si x es positivo, es decir $\langle x, x\rangle > 0$, entonces λx también es positivo, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. En efecto, $\langle \lambda x, \lambda x\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle x, x\rangle = |\lambda|^2\langle x, x\rangle > 0$.*
Si x es negativo, de forma similar, se establece que λx es negativo.

Un espacio con producto interno que cumple 1, 2, 3, 4, 5 se dice que es un espacio pre-Hilbert.

Todo espacio pre-Hilbert es en particular normado, donde la norma asociada se define como $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, y por tanto es también métrico, con la métrica asociada
$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}$.

Lema 1. Desigualdad de Cauchy-Schwarz.[2] *Si $(\mathfrak{F}, \langle , \rangle)$ es un espacio con producto interno semi-definido, entonces se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwarz*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

para todo $x, y \in \mathfrak{F}$. La igualdad tiene lugar si x, y son linealmente dependientes.

2.2. Espacios de Hilbert

Los espacios de Hilbert surgieron en los trabajos de índole geométrica de Grassmann y los trabajos sobre ecuaciones diferenciales de Euler y Lagrange. Grassmann introduce un producto interno asociado a lo que él denominó“expresiones extensivas” en los espacios de dimensión finita que posteriormente se denominarían “euclidianos” mientras que por el lado de las ecuaciones diferenciales Cauchy formula la definición de independencia lineal de funciones y Sturm y Louiville generalizan este concepto a espacios de funciones más amplios, sobre los cuales Hilbert introduce una generalización del producto interno de Grassmann dando origen al concepto de Espacio de Hilbert. El nombre de espacios de Hilbert es acuñado por Von Neumann en 1929.

Definición 3. *Un espacio de Hilbert es un espacio pre-Hilbert completo (con respecto a la métrica inducida por el producto interno). Por tanto, todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach en el que se ha definido un producto interno coherente con la norma del espacio, en el sentido de que $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$, para todo x del espacio.*

En los espacios de Hilbert tiene lugar el importante Teorema de Representación de Riesz:

Teorema 1 (Representación de Riesz)**.** *Un funcional $f : X \to E$ sobre un espacio de Hilbert es lineal y acotado si y sólo si existe un único $y \in X$ tal que $f(x) = \langle x, y\rangle$, $\forall x \in X$. además $\| f \| = \| y \|$.*

2.3. Espacios con Métrica Indefinida

Definición 4. *Sea $(\mathfrak{F}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno. Se dice que*
$x \in \mathfrak{F}$ es:

- *Positivo, si $\langle x, x\rangle > 0$*

- *Negativo, si* $\langle x, x\rangle < 0$
- *Neutro, si* $\langle x, x\rangle = 0$

Ésta definición conlleva a distinguir los siguientes conjuntos:
$\mathfrak{P}^0 = \{x \in \mathfrak{F} : \langle x, x\rangle = 0\}$
$\mathfrak{P}^{00} = \{x \in \mathfrak{F} : \langle x, x\rangle = 0, x \neq 0\}$
$\mathfrak{P}^+ = \{x \in \mathfrak{F} : \langle x, x\rangle \geq 0\}$
$\mathfrak{P}^{++} = \{x \in \mathfrak{F} : \langle x, x\rangle > 0, o\ x = 0\}$
$\mathfrak{P}^- = \{x \in \mathfrak{F} : \langle x, x\rangle \leq 0\}$
$\mathfrak{P}^{--} = \{x \in \mathfrak{F} : \langle x, x\rangle < 0, o\ x = 0\}$

Ejemplo 2. *Sea* $\mathfrak{F} = \{\{x_n\} \subset \mathbb{C} / \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$. *Si* $x = \{x_n\}$ *y* $y = \{y_n\}$ *son elementos de* $\mathfrak{F}$ *definase el producto como en (5). Es facil ver que (5) define un producto interno.*
En $(\mathfrak{F}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ $x = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, ...\}$ *es un vector positivo,* $y = \{0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, ...\}$ *es un vector negativo y* $z = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, ...\}$ *es un vector neutro.*

Definición 5. *Sea* $(\mathfrak{F}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio con producto interno. Si éste posee elementos positivos y negativos, se dice entonces que* $(\mathfrak{F}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *es un espacio con producto interno indefinido o un espacio con métrica indefinida.*

El espacio $\mathfrak{F}$ del Ejemplo (2) con el producto interno dado por la fòrmula (5) es un espacio con producto indefinido.

Un interesante resultado, debido a Krein y Shmulyan permite deducir que los conjuntos $\mathfrak{P}^+, \mathfrak{P}^{++}, \mathfrak{P}^-, \mathfrak{P}^{--}$ no son subespacios lineales.

Teorema 2. *Sea* $(\mathfrak{F}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio con producto interno. Si existe* $x \in \mathfrak{K}$ *tal que* x *es positivo, entonces todo vector del espacio se puede representar como la suma de dos vectores positivos.*

Ver demostración en [1].

Una de las dificultades que existen al trabajar con espacios que tienen métrica indefinida es la existencia de vectores que no siendo el vector nulo, se comportan como tal:

Definición 6. *Sea* $(\mathfrak{F}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio con producto interno indefinido y sea* $\mathfrak{L}$ *un subespacio lineal de* $\mathfrak{F}$. *Decimos que el vector* $x \in \mathfrak{L}$ *es un vector isotrópico para* $\mathfrak{L}$ *si* $\langle x, y\rangle = 0$, *para todo* $y \in \mathfrak{L}$. *Un vector es isotrópico si lo es para* $\mathfrak{F}$.

Más adelante se dará un ejemplo de un espacio en el cual existen vectores neutros que no son isotrópicos. Sin embargo en espacios semidefinidos (positivos o negativos) debido, por ejemplo a la desigualdad de Cauchy-Schwarz (lema 1), todo vector neutro es isotrópico.

En los espacios de Hilbert el único vector isotrópico es el vector nulo. En los espacios con métrica indefinida esto no es necesariamente cierto. Esto motiva la introducción de la siguiente clasificación de espacios:

Definición 7. *Un espacio es degenerado si tiene otro vector isotrópico además del vector nulo y es no-degenerado en caso contrario.*

Ejemplo 3. *En el espacio* $\mathfrak{F}$ *del Ejemplo (1) con el producto dado por la fórmula (1) el vector* $\{1, 2, 0, 0, ...\}$ *es isotrópico. Como no es nulo, entonces el espacio es degenerado. Si el producto se da por la fórmula (5) el espacio es no degenerado.*

Puede ocurrir que un espacio con métrica indefinida tenga vectores isotrópicos para un subespacio y el espacio sea no-degenerado.

Considérese el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4. *Se introduce en el conjunto de parejas ordenadas de números complejos* ($\mathbb{C}^2$) *un producto interno mediante la fórmula*

$$\langle x, y\rangle = x_1\overline{y_1} - x_2\overline{y_2}, \tag{6}$$

donde $x = (x_1, x_2)$ *y* $y = (y_1, y_2)$ *Sea* $\mathfrak{L} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2/x_1 = x_2\}$. *Entonces se puede notar que todo vector de* $\mathfrak{L}$ *es neutro e isotrópico para el mismo* $\mathfrak{L}$ *y sin embargo, el único vector isotrópico para el espacio es el vector (0 , 0).*

Este ejemplo muestra además la existencia de espacios en los cuales existen vectores neutros que no son isotrópicos y también que el conjunto de todos los vectores ortogonales a un subespacio no necesariamente forman un subespacio complementario en cuanto que su suma con aquel subespacio no es igual a todo el espacio. Por esta razón la expresión ”complemento ortogonal”no es adecuada.

Definición 8. *Sea* $\mathfrak{M}$ *un subconjunto de un espacio con métrica indefinida* $(\mathfrak{F}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$*, llamamos compañero ortogonal de* $\mathfrak{M}$ *al conjunto*

$$\mathfrak{M}^{\perp} = \{x \in \mathfrak{F}/ \langle x, y\rangle\} = 0, \textit{ para todo } y \in \mathfrak{M}$$

En el ejemplo dado, el compañero ortogonal del subespacio $\mathfrak{L}$ es él mismo.

Definición 9. *Dos conjuntos* $\mathfrak{M}$ *y* $\mathfrak{N}$ *en* $\mathfrak{F}$ *son ortogonales (* $\mathfrak{M}\perp\mathfrak{N}$ *) si* $\langle x, y\rangle = 0$*, para todo* $x \in \mathfrak{M}$ *y para todo* $y \in \mathfrak{N}$*. Decimos que un subespacio* $\mathfrak{L}$ *es la suma ortogonal de los subespacios* $\mathfrak{M}$ *y* $\mathfrak{N}$ *si* $\mathfrak{L} = \mathfrak{M} + \mathfrak{N}$ *y además* $\mathfrak{M}\perp\mathfrak{N}$*. Si la suma es directa escribiremos* $\mathfrak{L} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$

Definición 10. *Un espacio con producto interno indefinido* $(\mathfrak{F}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *es descomponible, si admite una descomposición en la forma* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^+ \oplus \mathfrak{F}^- \oplus \mathfrak{F}^0$ *donde* $\mathfrak{F}^+ \in \mathfrak{B}^{++}$, $\mathfrak{F}^- \in \mathfrak{B}^{--}$, $\mathfrak{F}^0 \in \mathfrak{B}^0$*. Tal descomposición recibe el nombre de Descomposición Fundamental.*

El conjunto $\mathbb{C}$ *del ejemplo anterior es descomponible. En efecto* $\mathbb{C} = \{z \in \mathbb{C}/z = \lambda(1,0)\} \oplus \{z \in \mathbb{C}/z = \lambda(0,1)\}$

Si $\mathfrak{F}$ *es no-degenerado, la descomposición fundamental tiene la forma*

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^+ \oplus \mathfrak{F}^- \tag{7}$$

donde $\mathfrak{F}^+$ *y* $\mathfrak{F}^-$ *son como arriba.*

Observación 2. *Si* $(\mathfrak{F}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *admite una Descomposición Fundamental (7), entonces todo* $x \in \mathfrak{F}$ *se puede escribir de manera única en la forma*

$$x = x^+ + x^-,\ x^+ \in \mathfrak{F}^+,\ x^- \in \mathfrak{F}^-.$$

2.4. Espacios de Krein

Entre los espacios de métrica indefinida se destacan por sus múltiples aplicaciones los espacios de los espacios de Krein y Pontryagin que son una generalización de los espacios de Hilbert.

Definición 11. *Un espacio con producto interior $(\mathfrak{F}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ que admite una descomposición fundamental de la forma (7) donde $(\mathfrak{F}^+, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y $(\mathfrak{F}^-, -\langle\cdot,\cdot\rangle)$ son espacios de Hilbert recibe el nombre de espacio de Krein.*

En adelante usaremos la notación $\mathfrak{K}$ para los espacios de Krein y $\mathfrak{K}^+$, $\mathfrak{K}^-$ para los subespacios positivos y negativos de la descomposición fundamental, es decir :

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^- \tag{8}$$

Ejemplo 5. *Sea $\mathfrak{K} = l_2$ con el producto interno siguiente:*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} x_k \overline{y_k}\ , \textit{ donde } x = \{x_k\} \textit{ y } y = \{y_k\}$$

Este espacio admite la descomposición fundamental: $l_2 = l_i \oplus l_p$, donde l_p es el espacio generado por la familia de sucesiones que constan de 1 en una única posición par y 0 en las demás, mientras que l_i es generado por la familia de sucesiones con 1 en alguna posición impar y 0 en las demás posiciones.

Nótese que los vectores de l_i son positivos con respecto al producto interno dado y los vectores de l_p son negativos. El único vector isotrópico es el vector nulo (la sucesión formada por ceros). Además l_i y l_p son subespacios ortogonales que tienen al vector nulo como único vector común.
Por otro lado si $\mathfrak{L}$ es el subespacio formado por todos los vectores que tienen 1 en las primeras k posiciones y 0 en las demás posiciones, donde $k \leq n$ es un número natural par y n es un natural fijo, entonces el compañero ortogonal de $\mathfrak{L}$ es el mismo.

Una descomposición fundamental de $\mathfrak{K}$ permite definir un producto interno sobre todo el espacio de Krein $\mathfrak{K}$ mediante la siguiente fórmula:

$$[x, y] = \left\langle x^+, y^+\right\rangle - \left\langle x^-, y^-\right\rangle, \text{ siendo } x = x^+ + x^-,\ y = y^+ + y^- \in \mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-.$$

Definición 12. *Dado un espacio de Krein $\mathfrak{K}$ con descomposición fundamental (8), denotaremos $|\mathfrak{K}|$ al espacio de Hilbert obtenido al reemplazar $\mathfrak{K}^-$ por su antiespacio $-\mathfrak{K}^-$:*

$$|\mathfrak{K}| = \mathfrak{K}^+ \oplus -\mathfrak{K}^-, \tag{9}$$

donde la suma directa considerada es la suma directa ortogonal entre espacios de Hilbert. Nótese que $[\cdot,\cdot] = \langle\cdot,\cdot\rangle_{|\mathfrak{K}|}$.

Ejemplo 6. *Sea $\mathfrak{F}$ el espacio del Ejemplo (1) con el producto dado por la fórmula (5). Una descomposición fundamental $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^+ \oplus \mathfrak{F}^-$ donde $\mathfrak{F}^-$ es el espacio generado por la colección enumerable de vectores $\{e_2, e_4, e_6, ..., e_{2n}, ...\}$ y $\mathfrak{F}^+$ es generado por $\{e_1, e_3, e_5, ..., e_{2n-1}, ...\}$ donde $e_i = \{0, 0, ..., 1, 0, ...\}$ el vector que tiene 1 en la i-ésima entrada y 0 en todas las demás $(i = 1, 2, ...)$. Entonces $|\mathfrak{F}| = l_2$*

Observación 3. *Dado un espacio de Krein $\mathfrak{K}$, la suma en (7) también es ortogonal con respecto al producto interior del espacio de Hilbert asociado (9).*
En efecto, si $x^+ \in \mathfrak{K}^+$ y $x^- \in \mathfrak{K}^-$, entonces $x^+ = x^+ + 0,\ x^- = x^- + 0$, por lo que

$$\left\langle x^+, x^-\right\rangle_{|\mathfrak{K}|} = \left\langle x^+, 0\right\rangle_{\mathfrak{K}} - \left\langle 0, x^-\right\rangle_{\mathfrak{K}} + \langle 0, 0\rangle_{\mathfrak{K}} + \left\langle x^-, x^-\right\rangle_{\mathfrak{K}} = 0.$$

En esa igualdad los sub-índices indican cuál producto se está considerando en cada situación y se ha considerado el hecho de que $\langle x^+, x^-\rangle_{\mathfrak{K}} = 0$.

Definición 13. *Sea $\mathfrak{K}$ un espacio de Krein con descomposición fundamental $\mathfrak{K} = (\mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, considérense los operadores $P^+ : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}^+, P^- : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}^- y J : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$ dados por*

$$P^+(x^+ + x^-) = x^+, \; P^-(x^+ + x^-) = x^- \; J(x^+ + x^-) = x^+ - x^- \tag{10}$$

Los operadores P^+, P^- se llaman Proyectores Fundamentales y el operador J se llama Simetría Fundamental asociados a la descomposición (7).

Definición 14. *Sea $\mathfrak{K} = (\mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Krein, considérese la siguiente forma sesquilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_J : \mathfrak{K} \times \mathfrak{K} \to \mathbb{C}$ definida por*

$$\langle x, y \rangle_J := \langle Jx, y \rangle$$

A esta se le llama J-producto interno y a la norma inducida por $\| \cdot \|_J = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_J}$ se le llama J-norma.

Ejemplo 7. *En el Ejemplo (6), se tiene que el J-producto coincide con el producto de l_2*

Definición 15. *Sea $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-$ y $x, y \in \mathfrak{K}$. Se dice que x es ortogonal a y, si $\langle x, y \rangle = 0$ y es denotado por $x \perp y$.*
x es J-ortogonal a y si $\langle x, y \rangle_J = 0$ y se denota por $x \perp_J y$ o $x(\perp)y$.

Observación 4. *La Simetría Fundamental y el producto interno indefinido satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $J^2 = Id, \;\; J = J^{-1}$, donde Id es el operador identidad.
2. $P^+ = \frac{J+Id}{2}$, en forma similar $P^- = \frac{Id-J}{2}$
3. $\langle x, x \rangle_J \geq 0, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_J \|y\|_J$.

Lema 2. *Si $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-$ es una descomposición fundamental del espacio no-degenerado $\mathfrak{K}$ y J es la correspondiente simetría fundamental, entonces $\mathfrak{K}^+$ es J-ortogonal a $\mathfrak{K}^-$.*

Definición 16. *El sistema $\{e_j\}_{j \in A}$ en $\mathfrak{K}$, donde A es cualquier conjunto arbitrario de indices, es llamado J-ortonormal si $\left\langle e_j, e_i \right\rangle = \pm\delta_{j,i}$, donde $\delta_{j,i}$ es la delta Kronecker.*

Definición 17. *Un sistema J-ortonormal $\{e_j\}_{j \in A}$ en $\mathfrak{K}$, se dice maximal si no hay otro sistema J-ortonormal que lo contenga, y se dice ser J-completo si no hay un vector J-ortogonal a este sistema.*

El siguiente teorema muestra una importante propiedad de los espacios de Krein que nos permite clasificarlos de acuerdo a las dimensiones de los subespacios positivos y negativos de una descomposición fundamental:

Teorema 3. *Sea $\mathfrak{K}$ un espacio de Krein y sean*

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1^+ \oplus \mathfrak{K}_1^-, \, \mathfrak{K}_1^+ \subseteq \mathfrak{B}^{++}, \mathfrak{K}_1^- \subseteq \mathfrak{B}^{--}$$
$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_2^+ \oplus \mathfrak{K}_2^-, \, \mathfrak{K}_2^+ \subseteq \mathfrak{B}^{++}, \mathfrak{K}_2^- \subseteq \mathfrak{B}^{--}$$

dos descomposiciones fundamentales de $\mathfrak{K}$. Entonces:

1. *La dimensión de $\mathfrak{K}_1^+$ es igual a la dimensión de $\mathfrak{K}_2^+$.*
2. *La dimensión de $|\mathfrak{K}_1^-|$ es igual a la dimensión de $|\mathfrak{K}_2^-|$.*

Sea $\mathfrak{K}$ un espacio de Krein, con descomposición fundamental

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-, \mathfrak{K}^+ \subseteq \mathfrak{P}^{++}, \mathfrak{K}^- \subseteq \mathfrak{P}^{--}$$

De acuerdo a este teorema se puede definir el rango de positividad (o índice positivo) de un espacio de Krein como la dimensión de $\mathfrak{K}^+$ y el rango de negatividad (o índice negativo) de un espacio de Krein como la dimensión de $|\mathfrak{K}^-| = -\mathfrak{K}^-$.

Vimos arriba ejemplos de subespacios tales que $\mathfrak{L} \oplus \mathfrak{L}^\perp \neq \mathfrak{K}$. Esto motiva la siguiente diferenciación de subespacios:

Definición 18. *Un subespacio $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{K}$ es ortocomplementado si $\mathfrak{L} \oplus \mathfrak{L}^\perp = \mathfrak{K}$.*

Ejemplo 8. *En el espacio $\mathfrak{F}$ del Ejemplo (1) con el producto (1) el espacio generado por $\{1, 0, 0, 0, ...\}$ y $\{0, 1, 0, 0, ...\}$ no es ortocomplementado. Mientras que el espacio generado por $\{e_5, e_6, ..., e_n, ...\}$ si lo es.*

Los siguientes teoremas nos dan algunas caracterizaciones de los subespacios ortocomplementados:

Teorema 4. *Un subespacio $\mathfrak{L}$ del espacio de Krein $\mathfrak{K}$ es ortocomplementado si y sólo si:*

1. *$\mathfrak{L}$ es cerrado y*
2. *$\mathfrak{L}$ es un espacio de Krein.*

Teorema 5. *Un subespacio $\mathfrak{L}$ del espacio de Krein $\mathfrak{K}$ es ortocomplementado si y sólo si:*

1. *$\mathfrak{L}$ es cerrado,*
2. *$\mathfrak{L}$ es no-degenerado, y*
3. *para cualquier descomposición*

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^+ \oplus \mathfrak{L}^-; \;\; \mathfrak{L}^+ \subset \mathfrak{P}^{++}, \;\; \mathfrak{L}^- \subset \mathfrak{P}^{--} \tag{11}$$

de $\mathfrak{L}$, una descomposición

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-; \;\; \mathfrak{K}^+ \subset \mathfrak{P}^{++}, \;\; \mathfrak{K}^- \subset \mathfrak{P}^{--} \tag{12}$$

de $\mathfrak{K}$ se puede encontrar, asi que

$$\mathfrak{L}^+ \subset \mathfrak{K}^+ \quad \mathfrak{L}^- \subset \mathfrak{K}^- \tag{13}$$

Definición 19. *Un subespacio $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{K}$ es uniformemente positivo si $\langle x, x\rangle \geq \alpha \|x\|_J^2$, $x \in \mathfrak{L}$ y uniformemente negativo si $\langle x, x\rangle \leq -\beta \|x\|_J^2$, $x \in \mathfrak{L}$, para α y β números positivos que dependen de $\mathfrak{L}$.*
$\mathfrak{L}$ es uniformemente definido si es uniformemente positivo o uniformemente negativo.

Ejemplo 9. *Sea $\mathfrak{F}$ como en el Ejemplo (1) y la fórmula (5). Sea $\mathfrak{L}$ la variedad lineal (subespacio) cuyos vectores tienen la forma: $\{\alpha, 0, \alpha, 0, x_5, 0, x_7, ...\} \in \mathfrak{F}$ con ceros en las entradas pares y $\alpha \geq 1$. Entonces si $x \in \mathfrak{L}$ tendremos que $\langle x, x\rangle = 2\alpha^2 + \sum_{n=5}^{+\infty} |x_n|^2 \geq \frac{1}{2}[2\alpha^2 + \sum_{\substack{n=5 \\ n-impar}}^{+\infty} |x_n|^2] = \frac{1}{2} \parallel x \parallel_J^2$*

Teorema 6. *Un subespacio semi-definido de $\mathfrak{K}$ es ortocomplementado si y sólo si es cerrado y uniformemente definido.*

Para un subespacio posiblemente indefinido $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{K}$ se tiene:

Teorema 7. *Un subespacio $\mathfrak{L}$ del espacio de Krein $\mathfrak{K}$ es ortocomplentado si y sólo si $\mathfrak{L}$ es la suma directa ortogonal de un subespacio cerrado uniformemente positivo y un subespacio cerrado uniformemente negativo.*

Lema 3. *Un subespacio de $\mathfrak{K}$ es uniformemente positivo (uniformemente negativo) si y sólo si su clausura también lo es.*

Recuérdese que si $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-$ es una descomposición fundamental y J es la simetría fundamental asociada a esa descomposición, entonces se induce sobre $\mathfrak{K}$ una topología mediante la norma $\|x\|_J^2 = \langle Jx, x\rangle$. A esta topología se le llama topología fuerte y, como se verá más adelante, es independiente de J.

El siguiente teorema extiende el teorema de representación de Riesz a espacios de Krein.

Teorema 8. *Sea $f : \mathfrak{K} \to \mathbb{C}$ un funcional lineal y continuo. Entonces existe un único vector $y \in \mathfrak{K}$ tal que*

$$f(x) = \langle x, y\rangle \textit{ para todo } x \in \mathfrak{K}.$$

Demostración. Conforme a la topología definida en $\mathfrak{K}$ se tiene que $f : |\mathfrak{K}| \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal y continuo.
Por el Teorema (1) existe $z \in \mathfrak{K}$ tal que $f(x) = \langle x, z\rangle_J$ para todo $x \in \mathfrak{K}$. Como $\langle x, z\rangle_J = \langle x, Jz\rangle$, tomando $y = Jz$ se tiene la existencia. Para verificar la unicidad se utiliza el hecho de que $\mathfrak{K}$ es no-degenerado. □

2.5. Espacios de Pontryagin

Definición 20. *un espacio de Pontryagin es un espacio de Krein con uno de sus indices finito.*

Por lo tanto un espacio de Pontryagin es un espacio de Krein $\mathfrak{K}$ con descomposición fundamental

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-, \mathfrak{K}^+ \subseteq \mathfrak{B}^{++}, \mathfrak{K}^- \subseteq \mathfrak{B}^{--}$$

tal que la dimensión de $\mathfrak{K}^+$ o la dimensión de $\mathfrak{K}^-$ es finita.

Ejemplo 10. *Sea $\mathfrak{F}$ el espacio del Ejemplo (1) y $x = \{x_n\},\ y = \{y_n\}$ elementos de $\mathfrak{F}$. Defínase*

$$\langle x, y\rangle = -x_1\overline{y}_1 - x_2\overline{y}_2 - x_3\overline{y}_3 + \sum_{n=4}^{+\infty} x_n\overline{y}_n$$

Este es un espacio de Pontryagin con descomposición fundamental $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^+ \oplus \mathfrak{F}^-$ donde $\mathfrak{F}^+$ es el subespacio generado por los vectores $\{e_4, e_5, ...\}$ y $\mathfrak{F}^-$ es generado por $\{e_1, e_2, e_3\}$ como $\dim\mathfrak{F}^- = 3 < +\infty$, entonces $(\mathfrak{F}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio de Pontryagin

Por definición todo espacio de Pontryagin es un espacio de Krein, todo espacio de Hilbert es un espacio de Pontryagin y todo espacio con producto interno no degenerado y de dimensión finita es un espacio de Pontryagin.

Al hablar de espacio de Pontryagin se supondrá que el índice finito es el negativo. Este índice finito se suele denotar por κ y el símbolo Π_κ denotará un espacio de Pontryagin de índice κ.

Algunos aspectos de la geometría de los espacios de Pontryagin son considerados en los siguientes teoremas:

Teorema 9.

1. Si $\mathfrak{L}$ es una variedad lineal definida negativa de un espacio Π_κ entonces $dim(\mathfrak{L}) \leq \kappa$.
2. Si $\mathfrak{L}$ es una variedad lineal definida negativa de un espacio Π_κ entonces $\mathfrak{L}$ es maximal definida negativa si y sólo si $\dim(\mathfrak{L}) = \kappa$.
3. Si $\mathfrak{L}$ es una variedad lineal κ-dimensional y definida negativa de un espacio Π_κ entonces existe una descomposición fundamental
$$\Pi_\kappa = \Pi^+ \oplus \Pi^-, \Pi^+ \subseteq \mathfrak{B}^{++}$$
tal que $\Pi^- = \mathfrak{L}$.

Espacios pre-Pontryagin

Definición 21. *Sea κ un entero no negativo. Un espacio pre-Π_κ es un espacio $\mathfrak{F}$ con producto interno no-degenerado, que contiene una variedad lineal maximal definida negativa de dimensión κ.*

Ejemplo 11. *Sea $\mathfrak{F}$ el espacio de las sucesiones que tienen a lo sumo una cantidad finita de términos no-nulos. Sean $x = \{x_n\}$ y $y = \{y_n\}$ elementos de este espacio. Defínase*
$$\langle x, y\rangle = -\sum_{\kappa=1}^{10} x_n\overline{y}_n + \sum_{\kappa=11}^{+\infty} x_n\overline{y}_n$$
$(\mathfrak{F}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio pre-Π_{10}.

Un espacio pre-Pontryagin es un espacio $\mathfrak{F}$ con producto interno tal que $\mathfrak{F}$ o su antiespacio es un espacio pre-Π_κ.

Observación 5. *(Una fórmula para las J-normas). Sea $\mathfrak{F}$ un espacio pre-Π_κ, sea $\mathcal{N} \subseteq \mathfrak{F}$ una variedad lineal definida negativa de dimensión κ. Entonces $\mathcal{N}^\perp$ es un espacio pre-Hilbert y además*
$$\mathfrak{F} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^\perp.$$
*Sea J la simetría fundamental asociada a esta descomposición y sea $\|\|_J$ la norma correspondiente.
Sea $\{e_1, ..., e_k\}$ una base ortonormal de $\mathcal{N}$. Si $x \in \mathfrak{F}$ entonces $x = x^+ + x^-$
$(x^- \in \mathcal{N},\ x^+ \in \mathcal{N}^\perp)$, donde*
$$x^- = -\sum_{j=1}^{\kappa} \left\langle x, e_j\right\rangle e_j,$$
entonces
$$\|x\|_J^2 = \langle x^+, x^+\rangle - \langle x^-, x^-\rangle = \langle x^+ + x^-, x^+ + x^-\rangle - 2\langle x^-, x^-\rangle = \langle x, x\rangle - 2\langle x^-, x^-\rangle,$$
de donde se deduce que
$$\|x\|_J^2 = \langle x, x\rangle + 2\sum_{j=1}^{\kappa} |\left\langle x, e_j\right\rangle|^2. \tag{14}$$

Un poderoso resultado establece que a pesar de que las J-normas son diferentes en $\mathfrak{K}$, porque cada una de ellas depende de la descomposición fundamental correspondiente, y que el valor de $\|x\|_J$ para un x fijo en $\mathfrak{K}$ puede recorrer un rango amplio de valores al variar la descomposición fundamental [10] , todas las J-normas son equivalentes y por ello inducen la misma topología denominada topología fuerte en $\mathfrak{K}$. Es con respecto a esta topología que se definen los conceptos topológicos de continuidad, acotación, etc. Pero eso será eventualmente tema de un próximo artículo.

3. Conclusión

Para concluir este primer artículo sobre espacios de Krein, cuyo propósito principal es el de generar entre los lectores de esta revista la curiosidad por el estudio de estos espacios, se debe comentar que el estudio de los espacios de Krein ha encontrado mucha aceptación en el mundo matemático contemporáneo y son ya innumerables los autores que han puesto su grano de arena en esta hermosa teoría.

Los resultados van desde detalles geométricos pasando por las aplicaciones en la mecánica cuántica, las ecuaciones diferenciales, la teoría espectral de operadores, etc., y recientemente, la teoría de marcos.

Referencias

[1] Bognár, J,: *Indefinite Inner Product space*.Berlin-New York: Springer-Verlag 1974.

[2] Bruzual, R.: *Espacios con métrica indefida*.Laboratorio de Formas en Grupos, Centro de Ánalisis, Escuela de Matemáticas, Universidad Central de Venezuela, Septiembre 2007.

[3] Dritschel M., Rovnyak J., *Theorems for Contraction operators on Krein Spaces, Operator Theory*. Advances and Applications. Vol.47, Birkhauser Verlag, Basel, 1990.

[4] Iohvidov,I.S: *Unitary operators in a space with an indefinite metric.* Zap. Mat. Otd. Fiz-Mat. Fak. i Har'kov. Mat. Obsc. (4) 21, 79-86 (1949) [Russian]

[5] Iohvidov,I.S., Krein, M.G.: *Spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric.* I. Trudy Moskov. Mat. Obsc. 5. 367-432 (1957) [Russian]

[6] Krein, M.G.:*An application of the fixed-point principle in the theory of linear transformations of spaces with an indefinite metric.* Upehi Mat. Nauk 5, no. 2, 180-190 (1950) [Russian]

[7] L. de Branges: *Complementation in Krein spaces*. Trans. American Math Soc. 305 (1988), 277-291.

[8] Langer, H.: *On J-hermitian operators*. Dokl. Akad. Nauk SSSR 134, 263-266 (1960) [Russian].

[9] Langer, H.: *Invariante Teilráume definisierbarer J-selbstadjungierter operatoren*. Ann. Akad. Sci. Fenn. Ser. A.I, no. 475 (1971).

[10] Langer M., Luger A.: *Operator theory: advances and applications*. On norms indefinite in inner product spaces. Vol 198, Birkh$\ddot{a}$user verlag, Basel, pags. 259-264 (2009) [Suiza]

[11] Pesonen, E.: *Uber die spektraldarstellung quadratischer Formen in linearen Raumen mit indefiniter Metrik*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI, no. 227 (1956)

[12] Pontryagin, L.S.: *Hermitian operators in spaces with indefinite metric*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 8, 243-280 (1944) [Russian]

[13] Schwarz.: *Sous-espaces hilbertiens déspaces vectoriels topologiques et noyaux associés (noyauxr eproduisants)* J. Analyse Math. 13 (1964),115-256 .

Para citar este artículo: Boris Lora et al. 2016, Espacios con métrica indefinida. Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA